ENUNCIADO DE UN TEOREMA: ¿ÚNICO COMPONENTE DE SU SIGNIFICADO?

Óscar Molina, Carmen Samper y Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional
ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx

La comunidad de educación matemática sugiere que la práctica de demostrar teoremas se favorece si las reglas lógicas y los enunciados de los elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y teoremas) tienen significado para los estudiantes, pues así podrán hacerlos operables en la demostración. Pero, ¿qué significa entender un teorema? Se podría pensar que tal expresión se refiere a entender el enunciado y, quizá, también su demostración. Como resultado de nuestra más reciente investigación, tenemos una propuesta que amplía el mencionado significado. En este cursillo pretendemos poner a consideración un significado amplio de la expresión *entender un teorema* e ilustrarlo en relación con un par de teoremas de la geometría euclidiana plana.

ASPECTOS CENTRALES DEL MARCO DE REFERENCIA

Entre 2011 y 2014, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ•G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) adelantó una investigación en la que analizamos la actividad semiótica que tuvo lugar en un aula universitaria, relativa a la construcción del significado de un teorema específico de la geometría euclidiana plana. Para realizar el análisis, nos fundamentamos en la propuesta de Signo tríadico de Charles S. Peirce (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). Bajo esa perspectiva, se precisó lo que entendemos por construcción de significado. Como resultado del análisis, identificamos los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran un significado amplio, que puede considerarse significado de referencia, de la expresión *entender un teorema*. Nuestra propuesta requiere precisar primero qué entendemos aquí por teorema y por construcción de significado.

¿Qué es *teorema*?

Haciendo eco a Mariotti et al. (1997), *teorema* es el sistema ternario conformado por un *enunciado*, la *demostración* de la relación de dependencia formulada en el enunciado, y el *sistema teórico* que la soporta. Nótese cómo

Molina, Ó., Samper, C. y Perry, P. (2015). Enunciado de un teorema: ¿único componente de su significado? *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 25-28.

esta definición de teorema va más allá de un enunciado y tiene en cuenta otros dos elementos. Naturalmente, nuestro significado de *entender un teorema* deberá darse en términos de los tres elementos. En el cursillo ilustraremos, por ejemplo, cómo para un teorema particular, el sistema teórico no solo sustenta la respectiva demostración, sino también cómo le da sentido (matemático) al enunciado, específicamente en lo que respecta al antecedente de la proposición condicional a través de la cual se expresa la relación de dependencia que se demuestra. Este es un asunto que rara vez se profundiza en las clases usuales de matemáticas, quizá por razones didácticas, pero cuyo tratamiento es de total pertinencia en un curso formal que aborde la demostración, su aprendizaje y enseñanza.

¿Qué es *construir un significado*?

En el ámbito educativo, es el proceso mediante el cual se producen y refinan interpretaciones sobre aspectos de un objeto matemático, generadas en la mente del estudiante cuando interpreta un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) en el que el profesor u otro estudiante pretende comunicar algo sobre el objeto; el propósito del proceso es que las interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado matemático pretendido (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

¿Qué es *entender un teorema*?

Los aspectos que, según nuestra propuesta, determinan a qué nos referimos con la expresión *entender un teorema* son los siguientes:

1. Identificar la estructura del enunciado, estructura desde el punto de vista de la lógica matemática.

2. Determinar el contenido geométrico del enunciado: identificar objetos y relaciones involucrados y atribuirles significado cercano al de referencia y útil en la interpretación del enunciado. Este aspecto permite establecer los contextos en los cuales es pertinente usar el teorema.

3. Realizar y/o entender la demostración de la relación de dependencia expresada en el enunciado. En este aspecto, se incluyen tres ítemes:

a) Método de la demostración: determinar si es directa, indirecta haciendo uso del principio de reducción ya sea negando la tesis del enunciado o descartando posibles casos, por inducción, etc.

b) Estructura de la demostración: determinar los pilares de la demostración. Estos son: i) los elementos teóricos centrales que la soportan (definiciones, postulados y teoremas), ii) el propósito de usarlos en su desarrollo, y iii) la manera en que están involucrados en la demostración (e. g., por medio de una construcción auxiliar).

c) Prospectiva de la demostración: hacer un análisis con el fin de explorar o de predecir el comportamiento de un paso hipotético en la demostración, y tomar decisiones con base en el análisis realizado, i. e., decidir si dicho paso finalmente hace parte o no de la demostración.

4. Comparar con otros teoremas: la comparación se hace entre enunciados y entre demostraciones. La primera, consiste en determinar si los enunciados se refieren a asuntos semejantes (e. g., existencia de objetos, comportamiento similar de los objetos involucrados como en el caso del punto medio y la bisectriz de un ángulo). La segunda, que puede darse entre demostraciones de una misma relación de dependencia o de dos distintas, consiste en determinar si las demostraciones tienen una misma estructura o no. Específicamente, se trata de determinar si las demostraciones emplean elementos homólogos y, en caso de que así sea, si el propósito de hacerlo es análogo.

5. Usar de manera experta el teorema en diversos contextos: uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o contextos donde se puede utilizar. Reconocemos dos contextos en los que se puede usar un teorema: i) en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; ii) en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de la demostración. Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es

suficiente; también hay que saber usarlo. Pero…

¿Qué significa saber usar un teorema?

Durante el cursillo, pretendemos ilustrar esto con dos ejemplos concretos y, con ello, describir lo que Selden (2012) denomina uso operable del teorema. Los teoremas que se estudiarán en el cursillo y sobre los cuales se ilustrarán cada uno de los elementos antes descritos son los siguientes:

> El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.
>
> El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de una ángulo dado y que pertenecen a su interior es el rayo bisector del ángulo.

REFERENCIAS

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21*st *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canadá: PME.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME. Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.